INSTITUTO DE FÍSICA DA UFBA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA DO ESTADO SÓLIDO
DISCIPLINA: FÍSICA GERAL E EXPERIMENTAL IV (FIS 124)

FLUXO E DIVERGENTE DE UM CAMPO VETORIAL

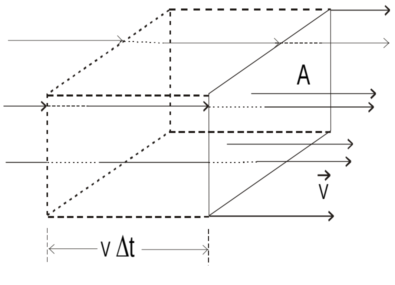
Os conceitos de divergente e rotacional estão relacionados aos de fluxo e de circulação respectivamente. Nesta e na próxima secção, faremos uma definição precisa destes conceitos e os associaremos com alguns fenômenos físicos conhecidos.

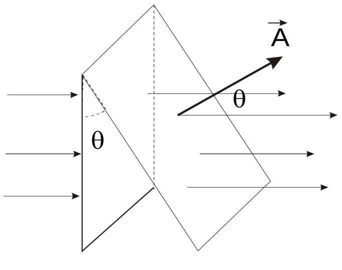
1. FLUXO

a. Fluxo através de uma superfície aberta plana

Suponha inicialmente uma superfície plana de área A dentro de um campo de velocidades $\vec{v}$. Este campo pode ser, por exemplo, um rio, um fluxo de gás dentro de uma tubulação, etc. De qualquer forma, haverá nesse campo um fluido onde a cada ponto associaremos um vetor velocidade $\vec{v}$. Neste primeiro enfoque vamos supor que o campo é uniforme (ou seja, a velocidade é a mesma para todos os pontos desse espaço e a direção e sentido se mantem constante) e que a superfície esteja perpendicular ao campo. Definimos então

$$[\text{FLUXO}]_{\text{(sup. aberta)}} = \Phi = \frac{[\,\textit{Quantidade de fluido que atravessa a superfície A no tempo } \Delta t\,]}{[\,\textit{unidade de tempo}\,]}$$





Podemos expressar esta definição em termos de v e de A com a seguinte consideração: num tempo Δt, cada partícula do fluido percorre uma distância v Δt. Assim, se construirmos um paralelepípedo de base A e comprimento v Δt, notaremos que toda a partícula que estiver dentro desta "caixa" atravessa a superfície A no tempo Δt. As partículas que estiverem fora não conseguirão, neste tempo, atravessar a superfície. Assim, *a quantidade de fluido que atravessa a superfície A no tempo Δt* será simplesmente o volume dessa "caixa" e vale v Δt A. O fluxo será então

$$\Phi = \frac{v\ \Delta t\ A}{\Delta t} = v\ A$$

Suponha agora que a superfície A esteja inclinada de um ângulo θ, como mostra a figura. Observe que a quantidade de fluido que atravessa A no tempo Δt é a mesma que atravessa A' (que é a projeção de A em um plano perpendicular às linhas de campo) . Assim $\Phi_A = \Phi_{A'} = v\ A'$.

Como $A' = A \cos\theta$, logo $\Phi_A = v\,A\cos\theta$

Podemos simplificar esta relação, usando o vetor área $\vec{A}$, que é definido como:

$$\vec{A} = \begin{cases} \text{módulo: área A} \\ \text{direção: perpendicular `a superfície A} \\ \text{sentido: é tal que } \theta \leq 90^{o} \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Desta forma, podemos escrever o fluxo de um campo vetorial uniforme $\vec{v}$ para uma superfície plana como sendo:

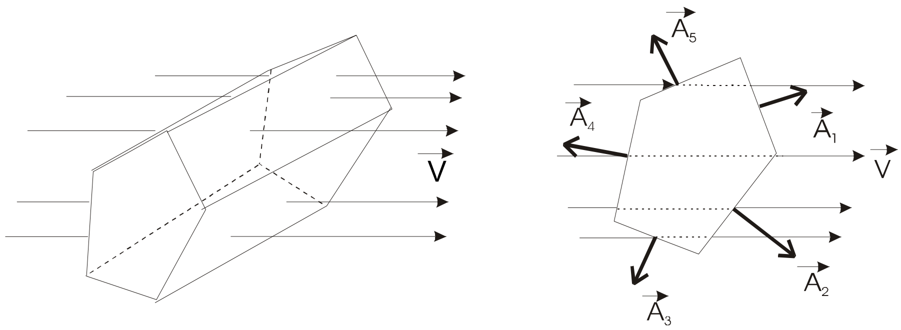
$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A} \qquad \textbf{(2)}$$

b. Fluxo através de uma superfície fechada Σ

Seja Σ uma superfície fechada dentro de um campo vetorial $\vec{v}$. Definimos:

$$\underset{\text{(sup. fechada)}}{[\text{ FLUXO }]} = \frac{[\textit{ Quantidade de fluido que } \textbf{\textit{sai}} \textit{ de } \Sigma \textit{ no tempo } \Delta t\ ]}{[\textit{ unidade de tempo}]} - \frac{[\textit{ Quantidade de fluido que } \textbf{\textit{entra}} \textit{ em } \Sigma \textit{ no tempo } \Delta t\ ]}{[\textit{ unidade de tempo}]} \qquad \textbf{(3)}$$

Apliquemos esta definição para o caso de uma superficie fechada, constituida pela junção de várias superfícies planas, dentro de um campo vetorial $\vec{v}$ uniforme (veja figura):



Para calcularmos o fluxo, definiremos um vetor $\vec{A}_j$ tal que:

$$\vec{A}_j = \begin{cases} \text{módulo: área A} \\ \text{direção: perpendicular `a superfície A} \\ \text{sentido: aponta sempre para fora da superficie} \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

De acordo com o exemplo da figura acima, notamos que o fluido *sai* através de A_1 e A_2 e *entra* por A_3, A_4 e A_5. Usando a relação (2) e a definição de fluxo (3), teremos:

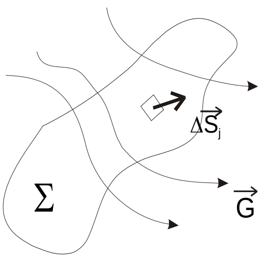
$$\Phi_{\Sigma} = \vec{v}.\vec{A}_1 + \vec{v}.\vec{A}_2 + \vec{v}.\vec{A}_3 + \vec{v}.\vec{A}_4 + \vec{v}.\vec{A}_5 = \sum_{j=1}^{5} \vec{v}.\vec{A}_j \qquad \textbf{(5)}$$

Observe que nas superfícies A_3, A_4 e A_5 o vetor $\vec{A}_j$ forma com $\vec{v}$ um ângulo θ, tal que $90^o < \theta < 270^o$, de sorte que $\vec{v}.\vec{A}_j = v\, A_j \cos\theta_j$ é negativo neste caso.

Podemos generalizar estas considerações, supondo agora uma superfície fechada constituida por N superfícies planas. Mais ainda: podemos supor que o campo não seja mais uniforme, mas que possa variar de região para região, com a condição de que assuma um valor constante $\vec{v}_j$ na superfície A_j. O fluxo será portanto:

$$\Phi_{\Sigma\ (\text{fechada})} = \sum_{j}^{N} \vec{v}_j.\vec{A}_j \qquad \textbf{(6)}$$

2. INTEGRAL DE SUPERFÍCIE



Suponha agora que uma superfície fechada Σ, de formato qualquer, seja inserida em um campo vetorial $\vec{G}$ não uniforme. Para definirmos o fluxo, tomaremos o seguinte procedimento :

a. Dividimos a superfície em pequenas superfícies de área ΔA_j de forma que:
   - ΔA_j seja *aproximadamente* plana
   - O campo G_j nessa superfície seja *aproximamente* constante

b. Definimos o vetor $\Delta\vec{A}_j$ de acordo com a definição (4)

c. O fluxo no elemento de área ΔA_j será $\Delta\Phi_j \cong \vec{G}_j.\Delta\vec{A}_j$

d. O fluxo total através de Σ será aproximadamente $\Phi \cong \sum_{j}^{N} \vec{G}_j.\Delta\vec{A}_j$

e. Para encontrarmos o valor exato do fluxo, fazemos $\Delta A_j \to 0$. Definimos então ***integral de superfície*** ao limite :

$$\Phi = \oint \vec{G}.d\vec{A} = \lim_{\Delta A_j \to 0} \sum_{j}^{N} \vec{G}_j.\Delta\vec{A}_j$$

f. Naturalmente podemos definir a integral de superfície para uma *superfície aberta* também. O procedimento é o mesmo, com duas pequenas modificações. A primeira delas se refere à definição do vetor elemento de área $\Delta\vec{A}_j$. Neste caso, este vetor é definido de acordo com a definição (1) ao invés de (4). Em segundo lugar, há uma modificação na notação, de forma que:

$$\Phi_{\Sigma\ \text{(aberta)}} = \int \vec{G}.d\vec{A} = \lim_{\Delta A_j \to 0} \sum_{j}^{N} \vec{G}_j.\Delta\vec{A}_j$$

g. O fluxo de um campo vetorial $\vec{G}$ através de uma superfície fechada Σ tem o seguinte significado físico:

$$[\text{FLUXO}]_{\text{(sup. fechada)}} = \frac{[\textit{Quantidade de (...) que sai de } \Sigma \textit{ no tempo } \Delta t]}{[\textit{unidade de tempo}]} - \frac{[\textit{Quantidade de (...) que entra em } \Sigma \textit{ no tempo } \Delta t]}{[\textit{unidade de tempo}]}$$

onde ***(...)*** é uma palavra que depende de qual seja o campo $\vec{G}$ considerado. Assim, se

$\vec{G} = \vec{v}$ (campo de velocidades), ***(...)*** = fluido

$\vec{G} = \vec{J}$ (densidade de corrente), ***(...)*** = carga

$\vec{G} = \vec{S}$ (vetor de Poynting), **(...)** = energia eletromagnética

No caso de $\vec{G} = \vec{E}$ (campo elétrico) ou $\vec{G} = \vec{B}$ (campo magnético), o fluxo será uma quantidade tal que:

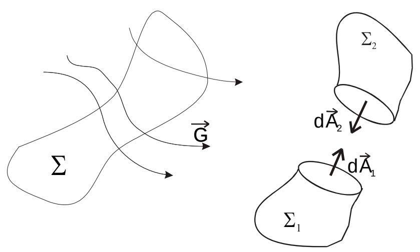
$\Phi \;\alpha$ [número de linhas de campo que *saem* de Σ] **-** [número de linhas de campo que *entram* em Σ]

2. O DIVERGENTE

Do estudo precedente é fácil verificar que se $\Phi \neq 0$, haverá divergência ou convergência (divergência negativa) do campo em relação à superfície fechada Σ. Mas agora, ao invés de concentrarmos no fluxo em uma região do espaço, desejamos fazer este estudo em relação a um ponto e em suas vizinhanças. A idéia central, portanto, é fazer a superfície tender a zero e calcular o fluxo nesse limite. Contudo, se diminuirmos a superfície, o fluxo também irá diminuir, até se anular no limite $A_j \to 0$. Porém, se calcularmos a razão entre o fluxo através de ΔA_j pelo volume ΔV_j, observaremos que ela *tenderá a um valor limite* quando $\Delta V_j \to 0$. É justamente esta propriedade que estamos buscando. Definimos então, o divergente de uma função vetorial $\vec{G}$ à grandeza:

$$\text{div } \vec{G} = \lim_{\Delta V_j \to 0} \frac{\oint \vec{G}.d\vec{A}_j}{\Delta V_j}$$

a. Teorema de Gauss



Seja uma superfície fechada Σ dentro de um campo vetorial $\vec{G}$. Ao dividirmos a superfície em duas superfícies fechadas Σ_1 e Σ_2, veremos que a soma dos fluxos através destas duas superfícies reproduzirá o fluxo original, uma vez que os vetores $d\vec{A}_1$ e $d\vec{A}_2$, que descrevem a interface entre Σ_1 e Σ_2, têm mesmo módulo e direção, mas sentidos opostos. Assim, devemos ter $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

Se dividirmos a superfície Σ em N superfícies fechadas, a soma dos fluxos através de todas essas superfícies reproduzirá o fluxo original, isto é:

$$\oint \vec{G}.d\vec{A} = \sum_{j}^{N} \oint \vec{G}.d\vec{A}_j$$

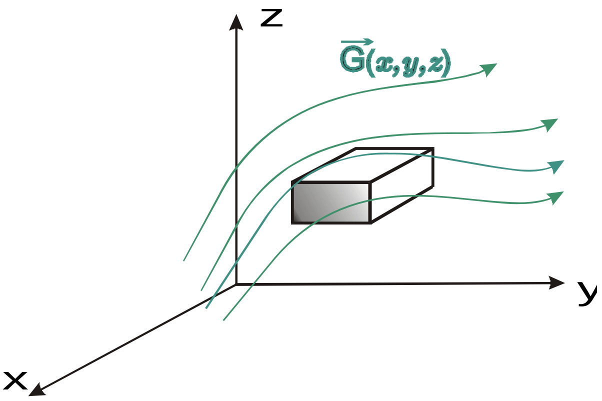
Observe que podemos reescrever esta expressão na forma:

$$\oint \vec{G}.d\vec{A} = \sum_{j}^{N} \left[\frac{\oint \vec{G}.d\vec{A}_j}{\Delta V_j} \right] .\Delta V_j$$

Ao passarmos ao limite de $\Delta V_j \to 0$, a quantidade entre os parênteses é o próprio divergente de $\vec{G}$ e a somatória, por definição, é a integral de volume. Assim

$$\oint \vec{G}.d\vec{A} = \int (\text{div } \vec{G})\ dV$$

b. O divergente em coordenadas cartesianas

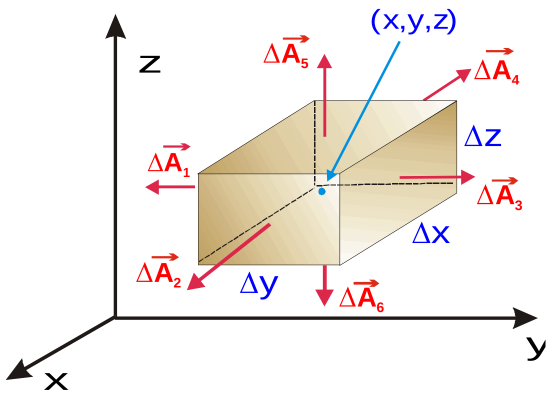


Seja um vetor $\vec{G}$, expresso em termos das coordenadas cartesianas :

$$\vec{G} = G_x(x,y,z)\ \vec{i} + G_y(x,y,z)\ \vec{j} + G_z(x,y,z)\ \vec{k}$$

Seja também um volume ΔV constituído por uma caixa retangular de lados Δx, Δy e Δz. Vamos calcular o fluxo através desta caixa: $\Delta\Phi = \oint \vec{G}.d\vec{A}$, dividi-lo pelo volume ΔV e fazer o limite $\Delta V \to 0$.

Note que $\Delta\Phi$ pode ser calculado somando-se os fluxos através de cada face da caixa.



No entanto, como estamos supondo que a caixa tem dimensões pequenas é razoável supor que, em cada face, o campo é aproximadamente constante e igual ao valor calculado em seu centro. Assim, o valor do fluxo para cada face *i* , será : $\Delta\Phi_i = \vec{G}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$. Podemos ver na figura que os vetores $\Delta\vec{A}$ em cada face são:

$$\Delta\vec{A}_1 = -\Delta x\ \Delta z\ \vec{j} \qquad \Delta\vec{A}_2 = \Delta y\ \Delta z\ \vec{i}$$

$$\Delta\vec{A}_3 = \Delta x\ \Delta z\ \vec{j} \qquad \Delta\vec{A}_4 = -\Delta y\ \Delta z\ \vec{i}$$

$$\Delta\vec{A}_5 = \Delta x\ \Delta y\ \vec{k} \qquad \Delta\vec{A}_6 = -\Delta x\ \Delta y\ \vec{k}$$

O fluxo na face 1 deverá ser então $\Delta\Phi_1 = \vec{G}(1)\cdot\Delta\vec{A}_1 = -G_y(1)\Delta x\Delta z$. Note que $G_y(1)$ é a componente *y* do campo no *centro da face 1*. Qual é a relação entre $G_y(1)$ e a componente *y* do campo no *centro da caixa* $G_y(x,y,z)$? Escrevendo $G_y(1)$ como:

$$G_y(1) = G_y(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)$$

obtemos do cálculo diferencial: $G_y(x,y,z) - G_y(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z) = \frac{\partial G_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2} + \varepsilon_1 \Delta y$

onde $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ e $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \varepsilon_1 = 0$

Logo:

$$\Delta\Phi_1 = -(G_y - \frac{\partial G_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2} - \varepsilon_1\Delta y)\Delta x\Delta y \qquad \text{onde } G_y = G_y(x,y,z)$$

Escrevendo $G_x = G_x(x,y,z)$ e $G_z = G_z(x,y,z)$, chegamos ao fluxo das demais faces da caixa:

$$\Delta\Phi_2 = G_x(2)\Delta y\Delta z = (G_x + \frac{\partial G_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \varepsilon_2\Delta x)\Delta y\Delta z$$

$$\Delta\Phi_3 = G_y(3)\Delta x\Delta z = (G_y + \frac{\partial G_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2} + \varepsilon_1\Delta y)\Delta x\Delta z$$

$$\Delta\Phi_4 = -G_x(4)\Delta y\Delta z = -(G_x - \frac{\partial G_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \varepsilon_2\Delta x)\Delta y\Delta z$$

$$\Delta\Phi_5 = G_z(5)\Delta x\Delta y = (G_z + \frac{\partial G_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{2} + \varepsilon_3\Delta z)\Delta x\Delta y$$

$$\Delta\Phi_6 = -G_z(6)\Delta x\Delta y = -(G_z - \frac{\partial G_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{2} + \varepsilon_3\Delta z)\Delta x\Delta y$$

O fluxo através da caixa será portanto:

$$\Delta\Phi = \sum_{i=1}^{6}\Delta\Phi_i = \left[\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} + 2\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right]\ \Delta x\ \Delta y\ \Delta z$$

Como $\Delta V = \Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ e $\operatorname{div}\vec{G} = \lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}$, então:

$$\operatorname{div}\vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

Se introduzimos o operador vetorial diferencial *nabla* $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ teremos:

$$\boxed{\text{div } \vec{G} = \vec{\nabla}.\vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}}$$

BIBLIOGRAFIA

1. Purcell E.M., *Curso de Física de Berkeley - vol.2,* Ed. Edgard Blucher, 1973, São Paulo.
2. Feynmam R., *Lectures on Physics - vol. 2,* Fondo Educativo Interamericano, 1972, Bogotá
3. Hsu, H.P., *Análise vetorial,* Livros Técnicos e Científicos, 1972, Rio de Janeiro.